

УДК 539.3

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ
ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР ОРТОТРОПНОЙ,
ПОВРЕЖДАЮЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ВЯЗКОУПРУГИМ ГРУНТОМ**

Ф.С.ЛАТИФОВ, М.З.ЮСИФОВ

*Азербайджанский Архитектурно - Строительный Университет
maarif_yusifov@mail.ru*

В данной статье с помощью вариационного принципа исследуются параметрические колебания тонкой, подкрепленной перекрестными системами ребер, ортотропной повреждающейся цилиндрической оболочки с вязкоупругим грунтом, находящейся под действием внутреннего давления $p = p_0 + p_1 \sin \omega_1 t$ (где p_0 - средняя или основная нагрузка, p_1 - амплитуда изменения нагрузки, ω_1 - частота ее изменения).

Ключевые слова: параметрические колебания, повреждение, оболочки, ортотропный.

Устойчивость, колебания и расчеты на прочность тонкостенных элементов конструкций оболочечного типа, контактирующие со средой играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Для придания большей жесткости оболочки подкрепляются различными ребрами. Такие конструкции могут находиться в контакте с внешней средой и подвергаться не только статическим нагрузкам, но и динамическим, и допускать прогибы, соизмеримые с толщиной. Однако, поведению тонкостенных элементов конструкций, имеющих ребер, учет их дискретного расположения, влияния внешней среды исследованы недостаточно. Поэтому разработка математических моделей для исследования поведений подкрепленных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров конструкции, контактирующей со средой, являются актуальными задачами. Решение такого типа задач представляет математическую трудность, которая углубляется учетом динамических эффектов, что необходимо в задачах сейсмостойкости, вибрации, которые часто встречаются в технике. Поэтому требуются разработки приближенного метода. Одним из приближенных методов является вариационный. Это объясня-

ется еще тем, что он позволяет получить непротиворечивые приближенные теории тонкостенных конструкций типа оболочек и стержней.

В данной статье с помощью вариационного принципа исследуются параметрические колебания тонкой, подкрепленной перекрестными системами ребер, ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с вязкоупругим грунтом, находящейся под действием внутреннего давления. Построены зависимости зоны динамической устойчивости колебаний подкрепленной перекрестными системами ребер, цилиндрической ортотропной оболочки в грунте от параметров конструкции на плоскости нагрузка-частота, где учтена повреждение в структуре оболочки, контактирующей с грунтом.

В работе [1] приведены результаты исследования колебаний повреждаемой ребристой цилиндрической оболочки, заполненной вязкоупругой средой. Исследования параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой гладкой цилиндрической оболочки и нелинейно-вязкоупругого стержня со средой с применением модели Пастернака проведены в работах [2,3]. Работа [4] посвящена исследованию параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки, контактирующей с вязкоупругой средой с учетом трения. В работе [5] приведены расчеты параметрических колебаний неоднородного по толщине вязкоупругого стержня в вязкоупругом грунте. Аналогичная работа для поврежденного вязкоупругого стержня в вязкоупругой среде рассмотрена в работе [6]. Параметрические колебания вязкоупругой гладкой оболочки с учетом повреждаемости, заключенной в вязкоупругую матрицу исследованы в работе [7]. В этих работах учитывается только нормальное составляющее контактного давления между гладкой оболочкой и средой.

Для учета повреждаемости, образованные в процессе колебаний в структуре подкрепленной перекрестными системами ребер, ортотропной цилиндрической оболочки в грунте, находящейся под действием внутреннего давления применяется наследственная теория повреждаемости, разработанная для одномерного случая в [5] и развитая для сложно – напряженного состояния в [6,7]. Согласно этой теории определяющие уравнения для однородного тела (\bar{x} -вектор-координата точки тела) записываются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + M^* \cdot \sigma_{ij},$$

где E - модуль Юнга, M^* -интегральные операторы наследственного типа, описывающие процессы повреждаемости, и для которых имеют место представления:

$$M^* \cdot \sigma_{ij} = \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau.$$

Здесь $M(\bar{x}, t - \tau)$ - ядро повреждаемости; $(t_k^-; t_k^+)$ -интервалы периодов активного напряжения, способствующего росту повреждаемости; $f(t_k^+)$ -функция залечивания дефектов, зависящем от объема повреждаемости, накопленной за данный цикл. Например, значения $f(t_k^+) = 0$ соответствует полному залечиванию дефектов, образовавшихся за данный цикл, а значения $f(t_k^+) = 1$ отсутствию самого эффекта залечивания дефектов. Все промежуточные значения от нуля до единицы соответствуют эффекту частичной залечиваемой дефектов. Для определения интервалов $(t_k^-; t_k^+)$ необходимо задавать специальные условия. Их удобно формулировать для конкретной задачи с учетом специфики конструкции, условия ее работы и вид нагружения. В данной работе так и поступается, и подобные условия будут сформулированы ниже.

Предположим, что интенсивность нагрузки, действующий на оболочку со стороны бесконечного вязкоупругого грунта можно написать в следующем виде:

$$q_z = k_c w - \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где Γ - ядро релаксации [10], w - прогиб оболочки, а k_c - коэффициент k_c определяется из решений упругой задачи [11]:

в случае малых инерционных воздействиях грунта

$$\begin{aligned} k_c = & -\mu_s \Delta^{-1} \left\{ \left(2(1 - 2\nu_s) K_n(k^*) + 2k^* K_n'(k^*) \right) k^{*2} \times \right. \\ & \times \left[2k^{*2} (k^{*2} - n^2) \frac{K_n'(k^*)}{K_n(k^*)} + 2n^2 k^* \right] - 2 \left(k^* K_n'(k^*) - (k^{*2} + n^2) K_n(k^*) \right) k^{*3} \times \\ & \times \left[2(3 - 2\nu_s) k^* \frac{K_n'(k^*)}{K_n(k^*)} - 2n^2 \right] + 2n \left(K_n(k^*) - k^* K_n'(k^*) \right) k^{*3} \times \\ & \left. \times \left[2(3 - 2\nu_s) k^* \frac{K_n'(k^*)}{K_n(k^*)} - 2n^2 \right] \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

в случае, когда инерционные действия грунта существенно

$$\begin{aligned} k_c = & \frac{E_s}{1 + \nu_s} K_n(\gamma_l^*) \left[\frac{K_n(\gamma_l^*)}{K_n(\gamma_l^*)} \left(-\gamma_l^* \frac{K_n'(\gamma_l^*)}{K_n(\gamma_l^*)} + \gamma_l^{*2} + n^2 - \frac{\nu_s}{1 - 2\nu_s} \mu_t^{*2} \right) \right. \\ & \left. - n^2 k^{*2} \mu_t^* + \frac{R^4 k^{*3} \gamma_l^{*2} K_n'^2(\gamma_l^*)}{\mu_t^* K_n^2(\gamma_l^*)} + \frac{2nk^* \gamma_l^* \mu_t^* K_n(\gamma_l^*)}{K_n(\gamma_l^*)} + \frac{2nk^{*3} \gamma_l^* K_n'(\gamma_l^*)}{\mu_t^* K_n(\gamma_l^*)} \right] \\ & \left. - \frac{k^{*3} \gamma_l^* \mu_t^{*2} K_n(\gamma_l^*) K_n'^2(\gamma_l^*)}{\mu_t^* K_n(\gamma_l^*) K_n^2(\gamma_l^*)} + \frac{k^{*3} \gamma_l^* \mu_t^{*2} K_n(\gamma_l^*) K_n'^2(\gamma_l^*)}{\mu_t^* K_n(\gamma_l^*) K_n^2(\gamma_l^*)} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-n^2 + n\gamma_t^* \frac{K_n'(\gamma_t^*)}{K_n(\gamma_t^*)} + \frac{\nu_s}{1-2\nu_s} n\gamma_t^* \left(\gamma_t^* - \gamma_t^* \frac{K_n'(\gamma_t^*)}{K_n(\gamma_t^*)} \right) \right) + \\
& + \left(\frac{k^* \gamma_t^* K_n'(\gamma_t^*)}{\mu_t^* K_n(\gamma_t^*)} + \gamma_t^{*2} + n^2 - \frac{\nu_s}{1-2\nu_s} \frac{2k^* \gamma_t^{*2}}{\mu_t^*} \right) \cdot \frac{\left[\frac{k^{*3} \gamma_t^* \gamma_t^{*2} K_n'(\gamma_t^*) K_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* K_n(\gamma_t^*) K_n^2(\gamma_t^*)} \right]}{2k^{*2} \gamma_t^* \gamma_t^* \frac{K_n'(\gamma_t^*) K_n'(\gamma_t^*)}{K_n(\gamma_t^*) K_n(\gamma_t^*)} - 2n^2 k^{*2}} \quad (3)
\end{aligned}$$

В выражениях (2) и (3) k, n, γ_e, γ_t - волновые числа, K_n - модифицированная функция Бесселя второго рода n -го порядка, $\gamma_e^2 = k^2 - \mu_e^2, \gamma_t^2 = k^2 - \mu_t^2, k^* = kR, \gamma_t^* = \gamma_t R, \gamma_t^* = \gamma_t R, k^* = kR, \mu_t^* = \mu_t R, \mu_t^* = \mu_t R$

$$\gamma_e = \left[k^2 - \frac{(1-\nu_s - \nu_s^2) \rho_s \omega^2}{(1-\nu_s) E_s} \right]^{\frac{1}{2}}; \gamma_t = \left[k^2 - \frac{2(1-\nu_s) \rho_s \omega^2}{E_s} \right]^{\frac{1}{2}}$$

В работе ядро релаксации Γ принято в виде: $\Gamma = A e^{-\beta t}$ (A, β - характерные постоянные).

Таким образом, решение задачи для оболочечной конструкции, материал которой следует вышеприведенным деформационным соотношениям, наследственной теории повреждаемости, а учет влияния грунта представляет собой достаточно сложную математическую задачу, трудность решения которой усугубляется учётом динамических эффектов, крайне важных для задач сейсмологии и виброзащиты. Получение аналитических решений здесь крайне проблематично, а в большинстве случаев просто невозможно. В этом случае актуальным является разработка приближенных методов решения, в частности, вариационных.

Постановка задачи. Рассмотрим подкрепленную перекрестными системами ребер ортотропную цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R , толщиной $2h$, длиной ℓ , контактирующей с вязкоупругим грунтом. Предполагается, что торцы оболочки шарнирно закреплены, т.е. при $x = 0; \ell$ имеет место:

$$N_{xx} = 0; M_{xx} = 0; w = 0; \nu = 0,$$

где N_{xx} - осевое усилие, M_{xx} - изгибающий момент, w, ν - компоненты вектора перемещения точки оболочки-прогиба и радиального перемещения, соответственно.

Для решения поставленной задачи применяется вариационный принципа Остроградского-Гамильтона. Согласно этому принципу истинные траектории отличаются от других возможных траекторий тем, что для первых должно выполняться условие

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta W) dt = 0 \quad (4)$$

Здесь по K понимается кинетическая энергия системы, под Π - потенци-

альная энергия и под $\delta'W$ – сумма элементарных работ внешних сил, $[t_0, t_1]$ – отрезок времени, в котором происходит процесс движения.

В том случае, когда все силы, действующие на систему, имеют потенциал, равенство (4) получает вид

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi) dt = 0 \quad (5)$$

где

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi) dt$$

- действие по Гамильтону. Это последнее равенство выражает известный принцип Гамильтона-Остроградского.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_i, \mathcal{G}_i, w_i и u_j, \mathcal{G}_j, w_j , соответственно, для i -го продольного и j -го поперечного стержней), необходимо определить также углы закручивания φ_{kpi} и φ_{kpi} .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеют место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); \mathcal{G}_i(x) = \mathcal{G}(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \\ w_i(x) &= w(x, y_i); \varphi_i = \varphi_1(x, y_i); \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i); \\ u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); \mathcal{G}_j(x) = \mathcal{G}(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \varphi_{kpi}(x) = \varphi_1(x_j, y); \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $h_i = 0,5h + H_i^1, h_j = 0,5h + H_j^1$, h – толщина оболочки, H_i^1 и H_j^1 – расстояния от осей i -го продольного и j -го поперечного стержня до поверхности оболочки, x_i и y_i – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой, φ_i, φ_{kpi} и φ_j, φ_{kpi} – углы поворота и закручивания поперечных сечений, соответственно, продольных и поперечных стержней.

Полная энергия упругой деформации ортотропной, подкрепленной перекрестными системами ребер, повреждающейся цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} R^2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \{ N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} - M_{11} \chi_{11} - M_{22} \chi_{22} - M_{12} \chi_{12} + \\ &+ N_{11} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{11} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{11} d\tau \right) + \\ &+ N_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{22} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{22} d\tau \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +N_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{\bar{t}_k}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{12} d\tau + \int_{\bar{t}_{n+1}}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{12} d\tau \right) - \\
& -M_{11} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{\bar{t}_k}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{11} d\tau + \int_{\bar{t}_{n+1}}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{11} d\tau \right) \\
& -M_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{\bar{t}_k}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{22} d\tau + \int_{\bar{t}_{n+1}}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{22} d\tau \right) - \\
& -M_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{\bar{t}_k}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{12} d\tau + \int_{\bar{t}_{n+1}}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{12} d\tau \right) \Big\} dx dy + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[E_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + E_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + E_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} \right)^2 + G_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \\
& + \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[E_j F_j \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + E_j J_{xj} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\
& \left. + E_j J_{zj} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R} \right)^2 + G_j J_{kpj} \left(\frac{\partial \varphi_{kpj}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \\
& + \rho_0 h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy + \\
& + \sum_{j=1}^{k_2} \rho_j F_j \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpj}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{kpj}}{\partial t} \right)^2 \right] dx \cdot ,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$b_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}; b_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}; b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2}, E_1, E_2 - \text{основные модули упругости ор-}$$

тотропного материала, R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, u, v, w – составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки, x_1, x_2 – координаты криволинейных краев оболочки; $F_i, J_{zi}, J_{yi}, J_{kpi}, F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{kpj}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения i – го продольного и j – го поперечного стержня относительно оси Oz , и оси параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; E_i, G_i, E_j, G_j – модули упругости и сдвига материала i – го продольного и j – го

поперечного стержня, t - временная координата, $t_1 = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_1}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}$,

ρ_0 , ρ_i , ρ_j - плотности материалов, из которых изготовлены оболочка, i - й продольный и j - й поперечный стержень, соответственно.

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz; \quad M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) z dz \quad (8)$$

$$w_{11} = b_{11}\chi_{11} + b_{12}\chi_{22}; \quad w_{22} = b_{12}\chi_{11} + b_{22}\chi_{22}; \quad w_{21} = w_{12} = b_{66}\chi_{12}.$$

Напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в срединной поверхности в соотношениях (8) определяются следующим образом:

$$\sigma_{11} = b_{11}\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22}; \quad \sigma_{22} = b_{12}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22}; \quad \sigma_{12} = b_{66}\varepsilon_{12} \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \bar{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w; \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Потенциальная энергия внешних поверхностных и краевых нагрузок, приложенных к панели, определяется как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде

$$A_0 = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_z + p) w dx dy - \int_{x_1}^{x_2} (S_2 u + T_2 \mathcal{G} + Q_2 w + M_2 \varphi_2) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} dx \quad (10)$$

Аналогично потенциальные энергии внешних краевых нагрузок, приложенных к торцам, соответственно, i - го продольного и j - го поперечного стержня, определяются следующими выражениями (принимается, что к ребрам приложены только краевые нагрузки):

$$A_i = - \left(T_i u_i + S_i \mathcal{G}_i + Q_i w_i + M_i \varphi_i + M_{1i} \varphi_{zi} + M_{kpi} \varphi_{kpi} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2}, \quad (11)$$

$$A_j = - \left(S_j u_j + T_j \mathcal{G}_j + Q_j w_j + M_j \varphi_j + M_{1j} \varphi_{zj} + M_{kpi} \varphi_{kpi} \right) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2}.$$

Для определения стационарного значения функционала (7) применим метод Ритца. Исходя из ожидаемой физической картины колебания цилиндрической оболочки неизвестные варьируемые величины ищем в виде:

$$u = \cos \frac{\pi x}{l} \sin(m\varphi) (u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t); \quad \mathcal{G} = \sin \frac{\pi x}{l} \cos(m\varphi) (v_0 \cos \omega t + v_1 \sin \omega t)$$

$$w = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(m\varphi) (w_0 \cos \omega t + w_1 \sin \omega t); \quad N_{11} = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(m\varphi) (\tilde{N}_{10} \cos \omega t + \tilde{N}_{11} \sin \omega t)$$

$$M_{11} = \cos \frac{\pi x}{l} \sin(m\varphi) (\tilde{M}_{10} \cos \omega t + \tilde{M}_{11} \sin \omega t); \quad M_{12} = \cos \frac{\pi x}{l} \cos(m\varphi) (\tilde{M}_{30} \cos \omega t + \tilde{M}_{31} \sin \omega t)$$

$$N_{12} = \cos \frac{\pi x}{l} \cos(m\varphi) (\tilde{N}_{30} \cos \omega t + \tilde{N}_{31} \sin \omega t); \quad (12)$$

$$N_{22} = -qR + \sin \frac{\pi x}{l} \sin(m\varphi) (\tilde{N}_{20} \cos \omega t + \tilde{N}_{21} \sin \omega t)$$

$$M_{22} = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(m\varphi) (\tilde{M}_{20} \cos \omega t + \tilde{M}_{21} \sin \omega t),$$

где m - число волн в окружном направлении, ω - частота колебания искомых величин $u, w, \mathcal{G}, N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}$. Член в выражении для окружного напряжения указывает на аналог аппроксимации с аппроксимацией для статики. В интегральных членах операторов повреждаемости периоды активного нагружения $[t_k^-, t_k^+]$ определяются по приведённым выше аппроксимациям при условии их убывания; это $\left[\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k + \arctg \frac{b}{a} \right) / \omega; 2\pi k + \arctg \frac{b}{a} \right]$, где a и b - соответственно, коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ в аппроксимационных представлениях. Характерное время T будем определять как наибольшее из t_n^+ . Подставим аппроксимации (12) в функционале (7) и учитывая, что $x_1 = 0, x_2 = L, y_1 = 0, y_2 = 2\pi, t_0 = 0, t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ проинтегрируем по x, y и t . Тогда получаем функцию \tilde{J} от искомых величин $u_0, u_1, w_0, w_1, \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \tilde{N}_{10}, \tilde{N}_{11}, \tilde{N}_{20}, \tilde{N}_{21}, \tilde{N}_{30}, \tilde{N}_{31}, \tilde{M}_{10}, \tilde{M}_{11}, \tilde{M}_{20}, \tilde{M}_{21}, \tilde{M}_{30}, \tilde{M}_{31}$.

Стационарное значение полученной функции \tilde{J} определяется из следующей системы:

$$\begin{aligned} & 1) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial u_0} = 0; \quad 2) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial u_1} = 0; \quad 3) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathcal{G}_0} = 0; \quad 4) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathcal{G}_1} = 0; \quad 5) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial w_0} = 0; \quad 6) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial w_1} = 0; \\ & 7) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{N}_{10}} = 0; \quad 8) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{N}_{11}} = 0; \quad 9) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{N}_{20}} = 0; \quad 10) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{N}_{21}} = 0; \\ & 11) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{N}_{30}} = 0; \quad 12) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{N}_{31}} = 0; \quad 13) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{M}_{10}} = 0; \quad 14) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{M}_{11}} = 0; \quad 15) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{M}_{20}} = 0; \\ & 16) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{M}_{21}} = 0; \quad 17) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{M}_{30}} = 0; \quad 18) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{M}_{31}} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Приравнявая главный определитель системы (13) к нулю, получим уравнение для нахождения критической силы устойчивости цилиндрической ортотропной оболочки с вязкоупругим грунтом, с учетом повреждение в структуре оболочки:

$$\det |a_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, 18). \quad (14)$$

Уравнение (14) реализовано численно при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} & F_j = 5,75 \text{ мм}^2; \quad I_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4; \quad I_{kp,j} = 0,48 \text{ мм}^4; \quad m = 1; \quad M(t - \tau) = \beta_1 = \text{const}; \\ & \nu = 0,3; \quad f(t_k^+) = 0,5; \quad R = 160 \text{ мм}; \quad \rho_0 = 7,82 / \text{см}^3 \quad |h_i| = 0,1375 \cdot 10^{-1} R \\ & L_1 = 800 \text{ мм}; \quad \frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}; \quad E_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; \quad \beta_1 = 0,07; \end{aligned}$$

$$\frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}; \quad h = 0,45 \text{ мм}; \quad \frac{I_{kp.i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6};$$

$$A = 0,1615; \quad \beta = 0,05; \quad k_1 = 15, \quad k_2 = 5.$$

$$E_i = E_j = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \quad h_j = 1,39 \text{ мм};$$

$$\tau_1 \cdot 10^{-4} = p_1 R \cdot 10^{-4}$$

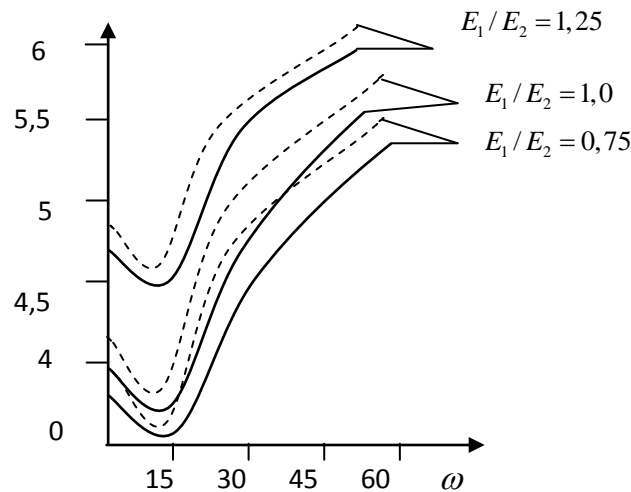


Рис. 1. Области устойчивых и неустойчивых параметрических колебаний.

На рис.1 приведены зависимости зоны динамической устойчивости от параметров конструкции на плоскости «нагрузка-частота» и представлены в виде кривой. Эта кривая разделяет плоскость на две области: для точек одной из которого колебания ограничены, а для другой – не ограничены во времени. Сплошная линия соответствует поврежденной, а пунктирная – неповрежденной оболочке. Счет показывает, что учет вязкости материала среды и повреждаемости приводит к снижению значения критической силы устойчивости рассмотренной системы по сравнению с критической силы той же системы, когда среда чисто упругая. Кроме того, расчет показывает, что учет анизотропии материала оболочки приводит к сужению устойчивых зон оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Искендеров Р.А. Колебания повреждаемой ребристой цилиндрической оболочки, заполненной вязко-упругой средой // «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформіового твердого тіла» Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, випуск 12, 2011, с. 140-151.
2. Пирмамедов И.Т. Исследования параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки с наполнителем с применением модели Пастернака // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2005, №2, с. 93-99.
3. Пирмамедов И.Т. Расчет параметрических колебаний нелинейно-вязкоупругого стержня в грунте на основе модели Пастернака // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2005, № 4, с. 79-87.
4. Пирмамедов И.Т. Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по тол-

- шине вязко-упругой цилиндрической оболочки, контактирующей с вязко-упругой средой с учетом трения // Доклад НАНА-а, 2008, № 2, с.35-42.
5. Пирмамедов И.Т. Расчет параметрических колебаний неоднородного по толщине вязкоупругого стержня в вязкоупругом грунте // Международный научно-технический журнал, Объединенный институт машиностроения НАН Белоруси, г. Минск, 2009, № 3(8), с.52-56.
 6. Пирмамедов И.Т. Расчет параметрических колебаний поврежденного вязкоупругого стержня в вязкоупругой среде // Вторая Международная конференция «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела», Казань, Россия, 2009, с. 283-288.
 7. Суворова Ю.В., Викторова И.В., Машинская Г.П. Длительная прочность и разрушение органопластиков. МКМ, 1980, №6, с. 1010-1013.
 8. Суворова Ю.В., Ахундов М.Б. Длительное разрушение изотропной среды в условиях сложного напряженного состояния. Машиностроение, 1986, №4, с.40-46.
 9. Ахундов М.Б. Деформирование, рассеянное разрушения и критерии прочности неупругих композитов. Изв. АН СССР, МТТ, 1991, №2, с.63-70.
 10. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Стройиздат, 1954, 56 с.
 11. Латифов Ф.С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой.// Баку: Элм, 1999, 164 с.

ÇARPAZ SİSTEMLİ QABIRĞALARLA BƏRKİDİLMİŞ, ORTOTROP, ÖZLÜ QRUNTLA ƏLAQƏDƏ OLAN ZƏDƏLƏNMİŞ SİLİNDRİK QABIĞIN PARAMETRİK RƏQSLƏRİ

F.S.LƏTİFOV, M.Z.YUSİFOV

XÜLASƏ

Məqalədə $p = p_0 + p_1 \sin \omega_1 t$ daxili təzyiqin təsiri altında olan (burada; p_0 -orta və ya əsas yük, p_1 -yükün dəyişmə amplitudası, ω_1 -onun dəyişmə tezliyidir), nazik, çarpaz sistemli qabırğalarla bərkidilmiş, özlü qrunlarla təmasda olan ortotrop zədələnmiş silindrik qabığın variasiya prinsiplərinin köməyiylə parametrik rəqsləri tədqiq olunur.

Açar sözlər: parametrik rəqslər, həlqəvi qabırğalarla bərkidilmiş, zədələnmə, qabıq, ortotrop.

PARAMETRICAL FLUCTUATIONS OF THE DAMAGED CYLINDRICAL COVER RELATED WITH CROSS SYSTEMED ORTOTROPIC AND VISCOELASTIC SOIL

F.S.LATİFOV, M.Z.YUSİFOV

SUMMARY

In this article, by means of the variation principle, parametrical fluctuations of the damaged cylindrical cover supported with cross systemed ortotropic and viscoelastic soil which is under the influence of the internal pressure of $p = p_0 + p_1 \sin \omega_1 t$ are investigated (where p_0 - average or main loading, p_1 - amplitude of change of loading, ω_1 -the frequency of its change).

Key words: parametrical fluctuations, damage, cover, ortotropic.

Принято в редакцию: 29.01.2015 г.

Подписано к печати: 20.04.2015 г.